



RÉVISIONS ECG1

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

TABLE DES MATIÈRES

1. Probabilités sur un ensemble discret	2
1.1. Définition d'une probabilité	2
1.2. Propriétés des probabilités	2
1.3. Probabilités conditionnelles.	3
1.4. Propriété de limite monotone	4
2. Variables aléatoires discrètes.	5
2.1. Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.	5
2.2. Fonction de répartition.	6
3. Moments d'une variable aléatoire discrète	7
3.1. Espérance	7
3.2. Moments d'ordre supérieur à 2.	9
3.3. Variance et écart-type d'une variable aléatoire	9
4. Lois usuelles discrètes	10
4.1. Loi certaine	10
4.2. Loi uniforme discrète.	11
4.3. Loi de Bernoulli	13
4.4. Loi binomiale	15
4.5. Loi géométrique	17
4.6. Loi de Poisson	19
5. Annexe : tables de la loi de Poisson	20
5.1. Calcul des probabilités $P(X = k)$ pour $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	20
5.2. Calcul de la fonction de répartition : $F_X(k) = P(X \leq k)$ pour $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.	21
6. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.	21

1. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE DISCRET

1.1. Définition d'une probabilité.

Définition : Espace probabilisable

Un **espace probabilisable** est un couple (Ω, \mathcal{A}) où Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire, et \mathcal{A} est la **tribu** des événements, contenant Ω , stable par passage au complémentaire et par union dénombrable :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. si $B \in \mathcal{A}$, alors $\bar{B} \in \mathcal{A}$ (autrement dit, si B est un événement, alors \bar{B} est un événement);
3. Pour toute famille $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} , on a

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}.$$

Définition : Probabilité

On appelle probabilité sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) toute application P de \mathcal{A} dans $[0; 1]$ vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$,
2. Propriété de σ -additivité : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements (donc d'éléments de \mathcal{A}) **deux à deux incompatibles**, alors la série de terme général $P(A_n)$ converge, et :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est appelé **espace probabilisé** et si $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A .

On rappelle que deux événements A_1 et A_2 sont incompatibles si

$$P(A_1 \cap A_2) = 0.$$

Remarque 1.1.1. Cette série converge car la suite des sommes partielles est croissante et majorée par 1.

1.2. Propriétés des probabilités.

Proposition : Propriétés élémentaires des probabilités

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit A, B deux événements. Alors on a :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \qquad P(\emptyset) = 0 \qquad A \subset B \text{ implique } P(A) \leq P(B)$$

Proposition : Formule du crible ou de Poincaré

Pour tous événements A, B, C ,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Cas disjoint : si les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux incompatibles, alors :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Il existe une formule qui donne la probabilité de l'union d'un nombre quelconque d'événements (pas forcément incompatibles), nous la verrons en exercice.

Remarque 1.2.1. Les écritures $P(A) \cup P(B)$ ou $P(A) \cap P(B)$ n'ont pas de sens car $P(A)$ et $P(B)$ sont des nombres !

1.3. Probabilités conditionnelles.

Théorème : Probabilité conditionnelle sachant A

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et A un événement de **probabilité non nulle**. Alors l'application P_A définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par :

$$\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

définit une probabilité sur Ω appelée **probabilité conditionnelle relative à A ou probabilité sachant A** .

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.3.1. On peut alors écrire : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Définition : Système complet d'événements

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé. Toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{A} **deux à deux incompatibles** ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et telle que $\boxed{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega}$ est appelée un **système complet d'événements**.

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. On a alors, pour tout $B \in \mathcal{A}$,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(B).$$

En particulier, si $A \in \mathcal{A}$ (avec $0 < P(A) < 1$). Alors (A, \bar{A}) est un système complet d'événements, et la formule des probabilités totales s'écrit, pour tout $B \in \mathcal{A}$,

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) P_A(B) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(B).$$

Démonstration. À compléter. □

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit A_1, A_2, \dots, A_n une famille d'événements telle que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)}.$$

Remarque 1.3.2. Pour $n = 3$, soit A, B, C trois événements tels que $P(A \cap B) \neq 0$, la formule se réécrit

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P_A(B) \times P_{A \cap B}(C).$$

Démonstration. À compléter. □

Théorème : Formule de Bayes

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, et A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}.$$

Démonstration. À compléter. □

1.4. Propriété de limite monotone. Dans le cas où \mathcal{A} est infini, on peut réaliser des unions ou intersections infinies d'événements : ce sont encore des événements dont on peut calculer les probabilités à l'aide de la propriété suivante :

Proposition : Limite monotone

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **croissante** d'événements de \mathcal{A} (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors la suite $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite **décroissante** d'événements de \mathcal{A} (c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), alors la suite $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Probabilité d'une réunion ou intersection infinie d'événements

Dans le cas d'une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- si les événements sont deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$), alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

- si la suite est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$), alors :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

- si la suite est décroissante ($\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$), alors :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Exemple 1.4.1. On lance un dé équilibré à 6 faces une infinité de fois et on note E_n l'événement : "le n^{e} lancer a donné 6", (avec $n \in \mathbb{N}^*$) de probabilité $\frac{1}{6}$.

1. On cherche à calculer la probabilité de l'événement A : "on n'a fait aucun 6". Notons A_n l'événement : "aucun des n premiers lancers n'a donné un 6" (avec $n \in \mathbb{N}^*$) de probabilité $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Alors $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$. De plus $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante donc $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = 0$.
2. On cherche à calculer la probabilité de l'événement B : "on a obtenu au moins un 6". Soit B_n l'événement : "on a obtenu le premier 6 au n^{e} lancer" (avec $n \in \mathbb{N}^*$) de probabilité $P(B_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6}$. On remarque que B est la réunion des B_n : $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, et que les B_n sont deux à deux incompatibles. Donc $P(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{6} = 1 (= 1 - P(A))$.

Cet exemple montre le besoin d'introduire la terminologie suivante.

Définition : Événements négligeables ou presque-sûrs

Soit $(\Omega : \mathcal{A}; P)$ un espace probabilisé et A un événement.

- Si $P(A) = 0$, on dit que A est un événement **négligeable**.
- Si $P(A) = 1$, on dit que A est un événement **presque-sûr** ou **quasi-certain**.

► Pour s'entraîner : exo 9.

2. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES.

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, modélisée par un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , on s'intéresse à une "grandeur aléatoire" associée à cette expérience. On va l'étudier via une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est appelée **variable aléatoire**. On s'intéresse alors à des événements du type $[X = a]$, $[X \leq a]$, $[X < a]$, $[a \leq X \leq b]$,... (avec a, b réels) qui décrivent le comportement de la variable aléatoire à l'aide d'événements de Ω .

2.1. **Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.** Rappelons tout d'abord la définition d'une variable aléatoire.

Définition : Variable aléatoire.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que X est une variable aléatoire si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = a\}$$

est un événement de \mathcal{A} .

Remarquons que si X ne prend jamais (ou presque sûrement jamais la valeur a) alors

$$\{\omega \in \Omega \text{ tel que } X(\omega) = a\} = \emptyset$$

(c'est donc automatiquement un événement de \mathcal{A}). Cette remarque nous conduit à nous intéresser plus particulièrement aux réels qui peuvent être atteints par l'application X .

Définition : Support.

Soit X une variable aléatoire. On note $X(\Omega)$ le **support** de X , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire X . Il s'agit de l'ensemble image de l'application X . On a supposé que X est une application à valeurs réelles donc $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$.

- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini de réels $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on dit que X est une **variable aléatoire finie**.
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble infini mais dénombrable $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie**.

Définition : Loi de probabilité.

Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est la donnée du support $X(\Omega)$ et des probabilités des événements $[X = x_k]$, notées $P(X = x_k)$, pour tout $x_k \in X(\Omega)$.

Exercice 2.1.1. On dispose d'une urne contenant des boules numérotées de 1 à 10 suivant la règle suivante : il y a k boules portant le numéro k , pour $k \in \{1, \dots, 10\}$. On tire une boule au hasard et on note X son numéro.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer la probabilité de tirer une boule portant un numéro inférieur ou égal à 3.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule portant un numéro strictement supérieur à 6.

Exercice 2.1.2. On lance indéfiniment un dé à 6 faces équilibré. On note X le nombre de lancers nécessaires pour voir apparaître un 6. Déterminer la loi de X .

Exercice 2.1.3. Une boîte contient 3 jetons rouges et 6 jetons bleus. On prélève simultanément 2 jetons dans l'urne. S'ils sont de la même couleur, on les remet dans l'urne et on tire à nouveau. Soit Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir deux jetons de couleurs différentes.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer la probabilité que les couleurs différentes apparaissent au plus tard au 10^e tirage.
3. Calculer la probabilité que les couleurs différentes apparaissent entre le 10^e et le 15^e tirages.

Proposition : Système complet d'événements associé à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire, et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ son support (fini ou infini).

Les événements $[X = x_k]$ (pour $k \geq 1$) forment un système complet d'événements.

Donc $\sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k) = 1$ (somme finie ou somme d'une série) avec $P(X = x_k) \geq 0$ pour tout $k \geq 1$.

Cela permet d'écrire la formule des probabilités totales : si Y est une variable aléatoire, la probabilité de l'événement $[Y = y]$ (avec $y \in Y(\Omega)$) peut s'écrire :

$$P(Y = y) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P([X = x_k] \cap [Y = y]) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} P(X = x_k)P_{[X=x_k]}(Y = y)$$

Réciproquement, si on a une suite $(p_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs ou nuls vérifiant $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$, alors ces réels décrivent la loi de probabilité d'une variable aléatoire X .

Exercice 2.1.4. On donne $P(Z = k) = \frac{4}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ pour tout $k \geq 2$. Montrer que cela définit bien une loi de probabilité.

► Pour s'entraîner : exo 1 et 10.

2.2. Fonction de répartition.

Définition : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle **fonction de répartition** de X la fonction numérique, généralement notée F_X , définie sur \mathbb{R} pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

La quantité $F_X(x)$ est donc le cumul (ou la somme) des probabilité $P(X = x_k)$ pour tous les réels $x_k \leq x$.

Méthode : La loi de probabilité donne la fonction de répartition

Notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si X est finie ou $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ si X est discrète infinie. On suppose que l'on a écrit le support de X dans l'ordre, c'est-à-dire

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$$

Si on connaît toutes les probabilités $P(X = x_k)$, on peut calculer la fonction de répartition en utilisant des unions disjointes d'événements :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n)$$

avec $x_n \leq x < x_{n+1}$.

Exercice 2.2.1. On lance deux dés à 4 faces équilibrés, et on note X la somme obtenue. Déterminer la loi et la fonction de répartition de X .

Proposition : Probabilité d'événements à l'aide de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire et notons $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ son support avec $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Alors :

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

En conséquence, si $x_k \leq x < x_{k+1}$, alors $F_X(x) = F_X(x_k)$: la fonction F_X est constante par morceaux. On dit que son graphe est "en escalier".

Démonstration. À compléter. □

Méthode : La fonction de répartition donne la loi de probabilité

Si on connaît la fonction de répartition, on peut trouver le support de X et calculer sa loi de probabilité. Le support est constitué des réels x_k où F_X n'est pas continue à gauche, et :

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$$

pour tout x_{k-1} et x_k éléments de $X(\Omega)$, avec $x_{k-1} < x_k$.

En particulier, si X est à valeurs entières, on obtient, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1).$$

Remarque 2.2.2. La fonction de répartition caractérise la loi : si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition, alors elles ont la même loi de probabilité.

Exemple 2.2.3 (Typique : loi d'un maximum). N personnes choisissent au hasard et indépendamment un numéro entre 1 et 100. On note X la variable égale au plus grand numéro choisi. Quelle est la loi de X ?

Méthode : Loi du maximum

Pour étudier la loi du maximum de certaines lois données, penser à passer par les fonctions de répartition !

Proposition : Propriétés des fonctions de répartition des variables aléatoires discrètes

Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition :

1. F_X est une fonction croissante sur \mathbb{R} , à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
3. F_X est continue à droite en tout réel x .

Démonstration. À compléter. □

► Pour s'entraîner : exo 11.

3. MOMENTS D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

3.1. **Espérance.** On cherche à calculer la "moyenne" des valeurs prises par une variable aléatoire.

Définition : Espérance d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Si X est finie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Le nombre réel $E(X)$ défini par

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$$

est appelé **espérance** de X .

- Si X est discrète infinie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Si la série

$$\sum_{k \geq 1} x_k P(X = x_k)$$

converge, alors on dit que X admet une espérance. Elle est définie par

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k).$$

Remarque 3.1.1. Si X est à valeurs entières : $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ ou $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, on examine la somme ou la série : $\sum_{k \geq 1} kP(X = k)$.

Exercice 3.1.2. On lance deux dés équilibrés à 4 faces, on s'intéresse à la somme X des points obtenus. Déterminer l'espérance de X .

Remarque 3.1.3. Attention : il existe des variables aléatoires discrètes infinies qui n'admettent pas d'espérance.

Définition : Variable aléatoire centrée

| Si $E(X) = 0$, on dit que la variable aléatoire X est centrée.

Proposition : Propriétés de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et admettant chacune une espérance. On a :

- **Linéarité de l'espérance** : $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$, pour tous réels λ et μ ;
- **Positivité de l'espérance** : si X est à valeurs positives, alors $E(X) \geq 0$;
- **Croissance de l'espérance** : si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$;
- **Espérance d'une constante** : si $X = a$ (presque sûrement), alors $E(X) = a$.
- **Espérance d'une fonction affine d'une variable aléatoire** : si X admet une espérance, alors $aX + b$ admet une espérance, et, pour tous réels a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Démonstration. À compléter. □

► Pour s'entraîner : exo 2, 3 et 4.

Théorème : Théorème du transfert : calcul de $E(g(X))$

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète et g une fonction numérique définie sur $X(\Omega)$. Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire, et son espérance peut être calculée de la manière suivante :

- si X est finie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et : $E(Y) = \sum_{k=1}^n g(x_k)P(X = x_k)$.
- si X est discrète infinie, alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.

Si la série

$$\sum_{k \geq 1} g(x_k)P(X = x_k)$$

converge, alors Y admet une espérance qui vaut :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} g(x_k)P(X = x_k).$$

Remarque 3.1.4. Attention, ce n'est pas parce que X admet une espérance, c'est-à-dire que la série

$$\sum_{k \geq 1} x_k P(X = x_k)$$

converge, que la série

$$\sum_{k \geq 1} g(x_k)P(X = x_k)$$

converge elle-aussi. Il se peut que X admette une espérance mais que $Y = g(X)$ n'en admette pas.

Remarque 3.1.5. Si X est à valeurs entières, on examine la somme ou la série $\sum_{k \geq 1} g(k)P(X = k)$.

Exercice 3.1.6. On lance indéfiniment un dé à 6 faces équilibré. On s'intéresse au nombre X de lancers qu'il va falloir attendre pour obtenir un 6.

1. X admet-elle une espérance ? Si oui, que vaut-elle ?
2. On pose $Y = 3^X$ et $Z = 2^{-X}$. Calculer $E(Y)$ et $E(Z)$ si c'est possible.

3.2. Moments d'ordre supérieur à 2. Parmi les exemples importants de fonctions de transfert, on s'intéresse aux fonctions g de la forme $x \mapsto x^r$. L'espérance de $g(X)$ est alors appelé son moment d'ordre r .

Définition : Moment d'ordre r .

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Si la variable aléatoire X^r admet une espérance, on dit que X admet un moment d'ordre r , qui vaut $E(X^r)$.

- Remarque 3.2.1.*
- Si $r = 1$, le moment d'ordre 1 coïncide avec l'espérance.
 - Si $r = 2$, le moment d'ordre 2 correspond à l'espérance de la variable X^2 . Il existe si, et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} (x_k)^2 P(X = x_k)$ converge.

Proposition : Moments d'ordre $s \leq r$

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Si X admet un moment d'ordre r , alors X admet un moment d'ordre s pour tout $s \leq r$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.2.2. La réciproque est fausse : il existe des variables aléatoires (discrètes infinies) admettant un moment d'ordre 1 mais pas de moment d'ordre 2.

Cependant, on peut utiliser la contraposée : si X n'admet pas de moment d'ordre p , alors X n'admet pas de moment d'ordre supérieur à p .

3.3. Variance et écart-type d'une variable aléatoire. On cherche maintenant à mesurer la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne, grâce à la variance. On introduit en effet la moyenne des "distances à la moyenne" :

Définition : Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace de probabilités (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X admet une variance si, et seulement si :

- la variable aléatoire X admet une espérance, notée m ;

- la variable aléatoire $(X - m)^2$ admet une espérance.

Dans ces conditions, la variance de X est alors égale à :

$$V(X) = E\left((X - m)^2\right) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

et l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque 3.3.1. La variance n'existe pas toujours : certaines variables aléatoires peuvent avoir une espérance mais pas de variance. Les variables qui n'admettent pas de variance sont celles qui sont "trop dispersées" autour de l'espérance.

Définition : Variable réduite

| Si $V(X) = 1$, on dit que la variable aléatoire X est réduite.

Théorème : Formule de Kœnig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . La variable X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2. Dans ces conditions, on

a : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

- **La variance est toujours positive :** si X admet une variance, alors $V(X) \geq 0$.
- **Variance d'une constante :** si $X = a$ (presque-sûrement), alors $V(X) = 0$.
- **Variance d'une fonction affine d'une variable aléatoire :** si X admet une variance, alors $aX + b$ admet une variance, et, pour tous réels a et b :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.3.2. Le caractère toujours positif de la variance justifie *a posteriori* la définition de l'écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (lorsque la variance existe).

► **Pour s'entraîner : exo 6 et 7.**

4. LOIS USUELLES DISCRÈTES

Il y a six lois usuelles discrètes à connaître parfaitement. Connaître une loi signifie qu'il faut en savoir le modèle (c'est-à-dire dans quel type d'expérience aléatoire, une certaine grandeur apparaît-elle que l'on veut modéliser avec la variable aléatoire de référence), la loi de probabilité, l'espérance, la variance et la fonction de répartition. Parmi ces six lois usuelles, quatre sont des lois finies : la loi certaine, la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$, la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et deux sont des lois discrètes infinies : la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

Pour les quatre lois finies, l'espérance et la variance existent toujours. Pour les deux lois infinies, il faudra en justifier l'existence.

4.1. Loi certaine.

Définition : Loi de probabilité certaine

| Une variable aléatoire X est dite de loi **certaine** si elle ne prend qu'une seule valeur avec probabilité 1 : $X(\Omega) = \{\lambda\}$ et $P(X = \lambda) = 1$.

Ce n'est donc pas vraiment une variable aléatoire puisque ses valeurs ne sont pas... aléatoires.

Proposition : Espérance et variance de la loi certaine

Soit X une variable aléatoire de loi certaine. Alors :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = 0.$$

Réciproquement : si X est a une variance nulle, alors X suit une loi certaine.

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Fonction de répartition d'une loi certaine

La fonction de répartition d'une variable aléatoire certaine X de support $X(\Omega) = \{\lambda\}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall x < \lambda, & \quad F_X(x) = 0 \\ \forall x \geq \lambda, & \quad F_X(x) = 1 \end{aligned}$$

4.2. Loi uniforme discrète.

Définition : Loi de probabilité et modèle de la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

Soit n un entier naturel non nul. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et on note $X \leftrightarrow \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{1, \dots, n\} \\ \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, & \quad P(X = k) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Modèle. C'est le cas d'une expérience dont les résultats possibles (notés ici $\{1, \dots, n\}$) sont équiprobables.

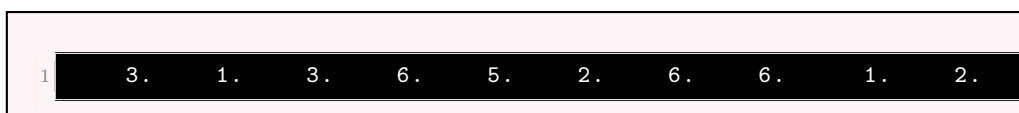
Exemple 4.2.1. Si X désigne le score obtenu en lançant un dé équilibré à 6 faces, alors $X \leftrightarrow \mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})$.

Remarque 4.2.2. Modélisation informatique.

Exemple, avec :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 Y=[]
5 for k in range(10) :
6     Y.append(rd.randint(1,7))
7 print(Y)
```

on obtient :

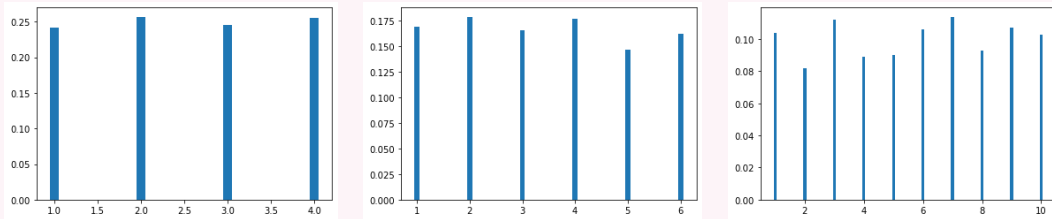


Avec 100 simulations et différentes valeurs de n , voici les diagrammes en bâtons des fréquences des résultats :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 n = 4 # faire varier n
6 N=1000
7 Y=np.zeros(n)
8 for k in range (N) :
9     i = rd.randint(1,n+1)
10    Y[i-1] = Y[i-1] + 1/N
11
12 X =[ k for k in range (1,n+1) ]
13 plt.bar(X,Y, width=0.1, align='center')
14 plt.show()
    
```

Simulations de lois uniformes.



Proposition : Espérance et variance de la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$. Alors :

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Démonstration. À compléter.

□

Proposition : Fonction de répartition de la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$ est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{k}{n} & \text{si } k \leq x < k + 1 \text{ avec } k \in \{1, \dots, n - 1\} \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Exemple 4.2.3. Tracer le graphe de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}(\{1, \dots, 6\})$.

Définition : Loi de probabilité et modèle de la loi uniforme discrète $\mathcal{U}(\{a, \dots, b\})$

Soit a et b deux entiers, $a < b$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur l'ensemble $\{a, \dots, b\}$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{a, \dots, b\})$ si, et seulement si :

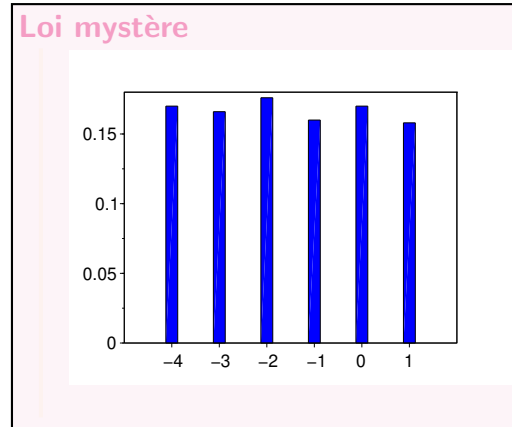
$$X(\Omega) = \{a, \dots, b\}$$

pour tout $k \in \{a, \dots, b\}$, $P(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

Modèle. C'est le cas d'équiprobabilité sur $\{a, \dots, b\}$.

Exemple 4.2.4. On a numéroté les 6 faces d'un dé équilibré avec les nombres 4, 5, 6, 7, 8, 9. On lance le dé et on note X le résultat obtenu. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{4, \dots, 9\})$.

Exemple 4.2.5. Quelle conjecture peut-on faire concernant la loi de la variable aléatoire dont les simulations donnent le diagramme en bâtons suivant ?



Les lois uniformes sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ et sur l'ensemble $\{a, \dots, b\}$ sont très similaires :

Proposition : Lien entre les lois $\mathcal{U}(\{a, \dots, b\})$ et $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$
 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}(\{a, \dots, b\})$. Alors $Y = X - a + 1$ suit la loi uniforme discrète sur $\{1, \dots, n\}$ avec $n = b - a + 1$.

Exemple 4.2.6. Avec les notations de l'exemple 4.2.4, calculer l'espérance et la variance de X .

4.3. Loi de Bernoulli.

Définition : Loi de probabilité et modèle de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$
 Soit p un nombre réel appartenant à $[0; 1]$. On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ ou $\mathcal{B}(p)$ si, et seulement si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}$$

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = q, \quad \text{avec } q = 1 - p$$

Modèle. On réalise une épreuve de Bernoulli (comportant deux issues possibles : "succès" et "échec"). Le nombre p représente la probabilité du succès et X prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Remarque 4.3.1. Il existe deux façons de simuler une loi de Bernoulli :

1. On peut soit utiliser la fonction `rd.rand()` (qui tire un nombre uniformément au hasard entre 0 et 1), puis identifier `rd.rand() < p` avec un événement de probabilité p . C'est donc le cas de succès de la Bernoulli que l'on modélise ainsi.
2. Soit utiliser la commande `rd.binomial(1,p)` qui simule directement une variable de Bernoulli de paramètre p . Nous verrons plus loin pourquoi cette commande utilise en fait la loi binomiale.

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def bernoulli(p) :
5     if rand() < p :
6         return 1
7     else :
8         return 0
    
```

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 rd.binomial(1,p)
    
```

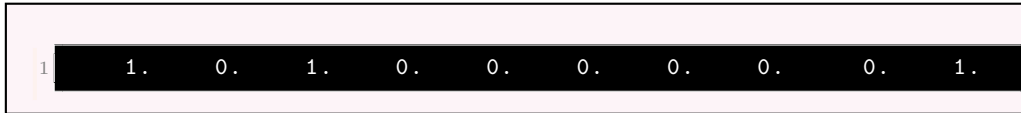
Avec

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 p=1/4
5 Y=[]
6 for k in range (10) :
7     Y.append(bernoulli(p))
8 print(Y)

```

on obtient en sortie :

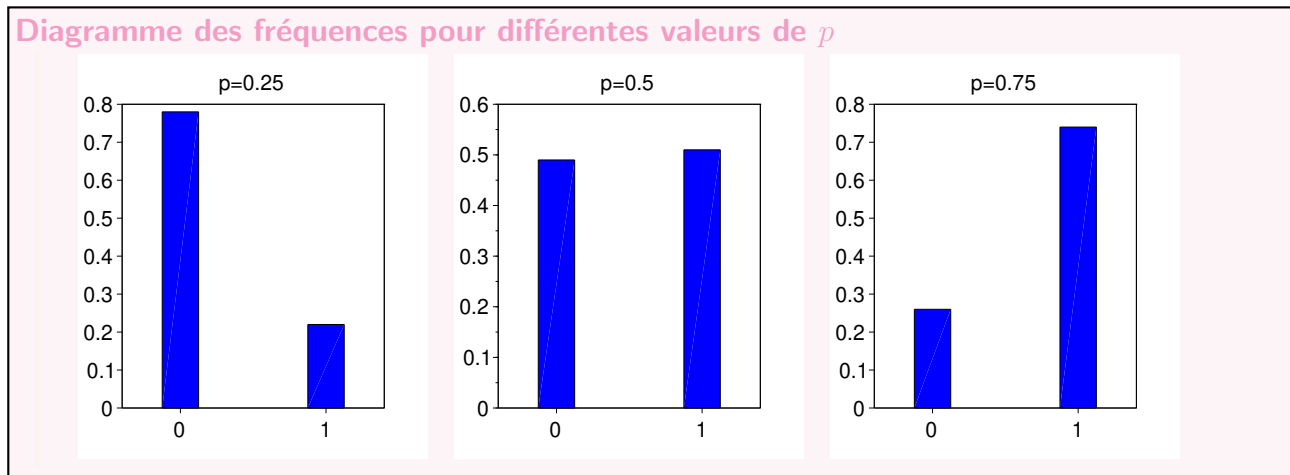


Avec 100 simulations et différentes valeurs de p , voici les diagrammes en bâtons des fréquences des résultats :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 p = 1/4 # faire varier p
6 N=1000
7 Y=np.zeros(2)
8 for k in range (N) :
9     i = rd.binomial(1,p)
10    Y[i-1] = Y[i-1] + 1/N
11
12 X = [0,1]
13 plt.bar(X,Y, width=0.1, align='center')
14 plt.show()

```



Proposition : Espérance et variance de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0; 1]$ et $q = 1 - p$. Alors :

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = pq.$$

Démonstration. À compléter.

□

Proposition : Fonction de répartition de la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0; 1]$. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ q & \text{si } 0 \leq x < 1. \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Exemple 4.3.2. Tracer le graphe de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 0,7$.

4.4. Loi binomiale.**Définition : Loi de probabilité et modèle de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$**

Soit n un entier naturel non nul et p un réel compris entre 0 et 1. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si, et seulement si :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{0, 1, 2, \dots, n\} = \{0, \dots, n\} \\ \text{pour tout } k \in \{0, \dots, n\}, \quad P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p \end{aligned}$$

Modèle. On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont le succès a pour probabilité p . Si X désigne le **nombre de succès** obtenus, alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Démonstration. Il faut encore vérifier que cette formule pour $P(X = k)$ détermine bien une loi de probabilités. C'est immédiat :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

d'après la formule du binôme. □

Exemple 4.4.1. On tire 10 fois une boule dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches, en remettant systématiquement la boule tirée dans l'urne. La proportion de boules blanches est égale à 30%. X désigne le nombre de boules blanches obtenues au cours de ces 10 tirages. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10; 0,3)$.

En effet, X est le **nombre de succès** dans la **répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes**, dont le succès "tirer une boule blanche" a pour probabilité 0,3.

Remarque 4.4.2. La loi binomiale s'appelle aussi la **loi du tirage avec remise**. Elle sera souvent utilisée dans ces situations. Attention, les épreuves de tirage sans remise sont plus délicates à modéliser, car les variables aléatoires construites pour chaque tirage ne sont pas indépendantes.

Exemple 4.4.3. Modélisation informatique : on peut modéliser la loi binomiale de deux façons différentes :

1. Soit en utilisant la loi de Bernoulli que l'on a codé précédemment.
2. Soit directement avec la commande `rd.binomial(n,p)`. Une binomiale de paramètre 1 et p n'est rien d'autre qu'une Bernoulli et on comprend donc pourquoi la commande `rd.binomial(1,p)` sert à simuler une Bernoulli.

```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def bino(n,p) :
5     U = []
6     for k in range(n) :
7         U.append(bernoulli(p))
8     return sum(U)
```

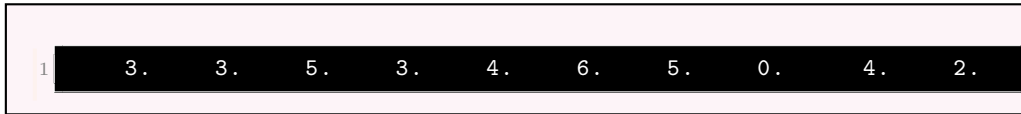
```
1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 rd.binomial(n,p)
```

Par exemple avec un paramètre de succès $\frac{2}{3}$:

```

1 p=2/3
2 Y=[]
3 for k in range(10) :
4     Y.append(bino(6,p))
    
```

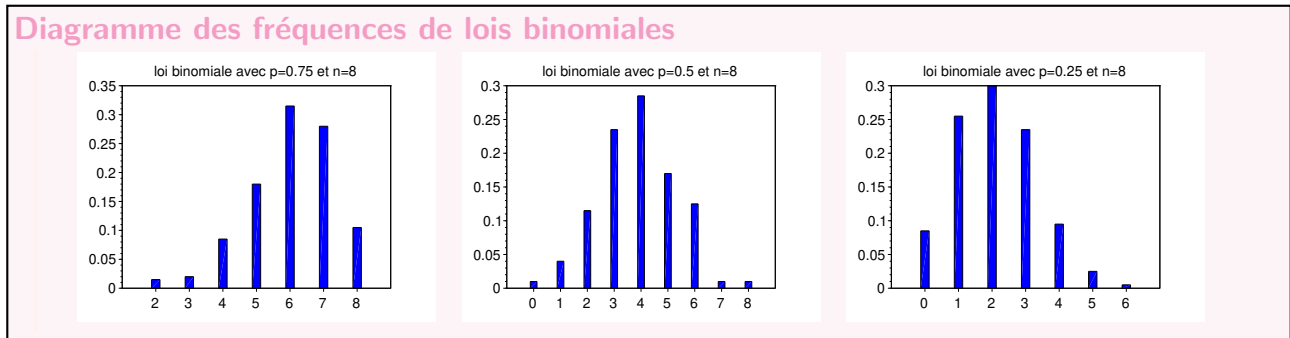
on obtient :



Remarque 4.4.4. Avec 1000 simulations et différentes valeurs de n et p , voici les diagrammes en bâtons des fréquences des résultats :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 p = 3/4 # faire varier p
6 n= 8 # faire varier n
7 N=1000
8 Y=np.zeros(n+1)
9 for k in range (N) :
10     i = rd.binomial(n,p)
11     Y[i-1] = Y[i-1] + 1/N
12
13 X =[ k for k in range (0,n+1) ]
14 plt.bar(X,Y, width=0.1, align='center')
15 plt.show()
    
```



La loi binomiale permet de compter le nombre de succès mais on peut aussi vouloir compter le nombre d'échecs.

Théorème : Lien entre les lois du nombre de succès et du nombre d'échecs en n tentatives

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ alors $n - X$ suit la loi $\mathcal{B}(n, 1 - p)$.

Si X désigne le nombre de succès en n tentatives, $n - X$ représente le nombre d'échecs, et réciproquement.

Démonstration. À compléter.

□

Pour calculer l'espérance et la variance de la loi binomiale, nous avons besoin d'un peu de technique.

Lemme 4.4.5. Relations entre les coefficients binomiaux.

- Pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

- Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{2, \dots, n\}$ on a

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Espérance et variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$, $q = 1 - p$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq.$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 4.4.6. On lance 4 fois un dé à 6 faces équilibré et on note X le nombre de fois où l'on a obtenu les faces 5 ou 6. Alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{3}\right)$. En effet, X désigne le **nombre de succès** dans la **répétition de 4 épreuves de Bernoulli** identiques et indépendantes dont le **succès** "obtenir 5 ou 6" a pour probabilité $\frac{1}{3}$.

$$X(\Omega) = \{0, \dots, 4\} \text{ et, pour tout } k \in \{0, \dots, 4\}, P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$$

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$
$F_X(k)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{48}{81}$	$\frac{72}{81}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{81}{81} = 1$

Exercice 4.4.7. Tracer la fonction de répartition de la loi précédente.

4.5. Loi géométrique.

Définition : Définition et modèle de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit p un réel, $p \in]0; 1[$. On dit que X suit la **loi géométrique** de paramètre p , et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si et seulement si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = q^{k-1}p \quad (\text{avec } q = 1 - p).$$

Modèle : On répète indéfiniment des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont le succès a pour probabilité p . Si X désigne le rang du **premier succès**, c'est-à-dire le premier moment pour lequel $X = 1$, alors X suit la loi géométrique de paramètre p .

Démonstration. À compléter. Attention, il faut bien penser à vérifier que la formule de $P(X = k)$ définit bien une loi de probabilité. □

Exemple 4.5.1. On lance le même dé équilibré jusqu'à obtenir 5 et on note X le numéro du premier lancer qui donne un cinq. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$. En effet, X désigne le **rang du premier succès** dans la répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont le **succès** "obtenir 5" a pour probabilité $\frac{1}{6}$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Exemple 4.5.2. On peut modéliser la loi géométrique de deux façons différentes

1. Soit en utilisant la loi de Bernoulli : on demande au programme de répéter des expériences de Bernoulli jusqu'au premier succès.

2. Soit directement en utilisant la commande `rd.geometric(p)`

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 def geom(p) :
5     temps = 1
6     ber = rd.bernoulli(p)
7     while (ber = 1) :
8         temps + = 1
9     return temps
    
```

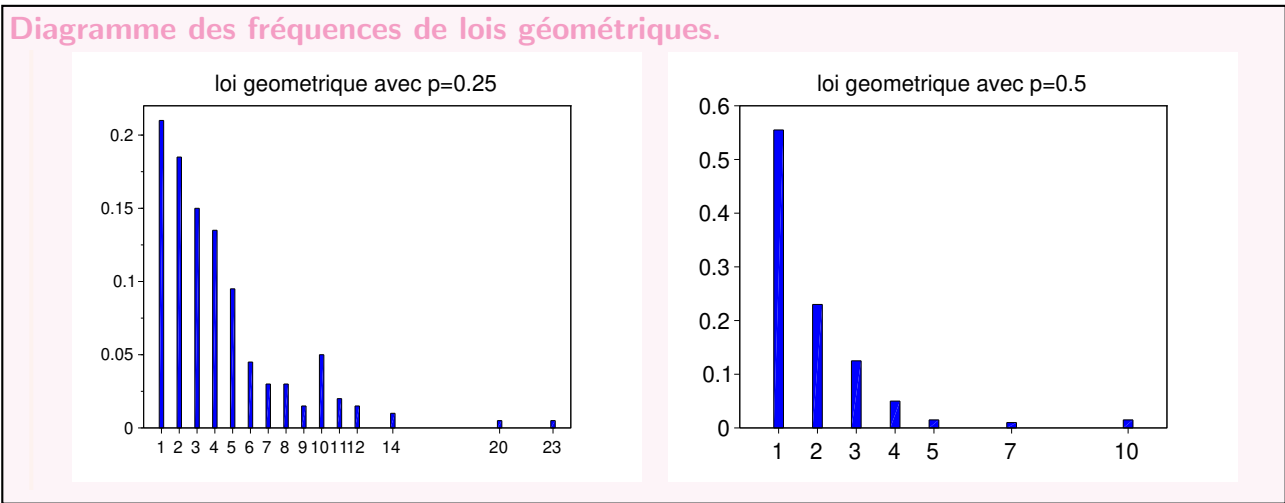
```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3
4 rd.geometric(p)
    
```

Remarque 4.5.3. Avec 1000 simulations et différentes valeurs de n et p , voici les diagrammes en bâtons des fréquences des résultats :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 p = 1/4 # faire varier p
6 N=1000
7 Y=np.zeros(25)
8 for k in range (N) :
9     i = rd.binomial(n,p)
10    Y[i-1] = Y[i-1] + 1/N
11
12 X =[ k for k in range (0,25) ]
13 plt.bar(X,Y, width=0.1, align='center')
14 plt.show()
    
```



Proposition : Espérance et variance de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$
 Soit $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Démonstration. À compléter.

□

La loi géométrique possède une propriété à connaître : on dit qu'elle est sans mémoire. Cela signifie que, dans la suite de réalisations de la variable de Bernoulli, ce n'est pas parce que les k premières tentatives sont des échecs, que l'on a plus de chances d'obtenir un succès pour les tentatives suivantes. La variable "a oublié" les k premiers échecs. Plus précisément.

Proposition : La loi géométrique est sans mémoire

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k) = q^k$. En conséquence :

$$P_{[X > k]}(X > k + \ell) = P(X > \ell)$$

pour tous entiers positifs ou nuls k et ℓ . On dit que le processus est **sans mémoire**.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.5.4. Réciproquement, on peut démontrer que toute loi discrète vérifiant cette propriété est une loi géométrique.

Proposition : Fonction de répartition de la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La fonction de répartition de X est donnée par :

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 0 && \text{si } x < 1 \\ F_X(x) &= 1 - q^k && \text{si } k \leq x < k + 1, \quad k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 4.5.5. On lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée et on note X le rang d'apparition du premier pile. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{2})$.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et, pour tout } k \geq 1, P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

k	1	2	3	4	5	...
$P(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$...
$F_X(k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$...

Exercice 4.5.6. Tracer la fonction de répartition de la loi précédente.

► : Pour s'entraîner : exo 5.

4.6. Loi de Poisson.

Définition : Loi de probabilité de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif. On dit que X suit la **loi de Poisson** de paramètre λ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si, et seulement si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

Modèle. Aucun modèle à connaître. La loi de Poisson sert à décrire certaines observations statistiques. La plupart du temps (mais il y a des situations où on rencontre la loi de Poisson qui ne sont pas de ce type), il s'agit de modéliser un temps d'attente : si X suit une loi de Poisson, on peut par exemple modéliser une expérience où $P(X = k)$ est la probabilité d'avoir à attendre k minutes dans une file d'attente.

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Espérance et variance de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X admet une espérance et une variance, qui valent :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda.$$

Démonstration. À compléter.

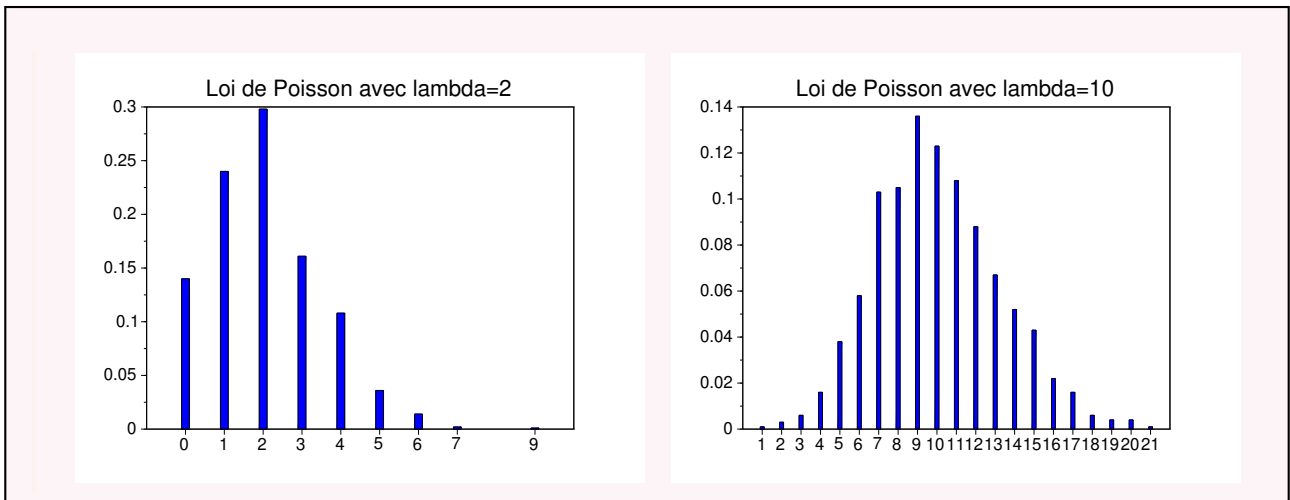
□

Remarque 4.6.1. Il n'existe qu'une seule façon de simuler une loi de Poisson : avec la commande `rd.poisson(a)`

Remarque 4.6.2. Avec 100 simulations et différentes valeurs de λ , voici les diagrammes en bâtons des fréquences des résultats :

```

1 import numpy as np
2 import numpy.random as rd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 a=2 # faire varier les valeurs de a
6 N=100
7 Y=np.zeros(30)
8 for k in range (N) :
9     i = rd.poisson(a)
10    Y[i-1] = Y[i-1] + 1/N
11
12 X = [ k for k in range (0,30) ]
13 plt.bar(X,Y, width=0.1, align='center')
14 plt.show()
    
```



Remarque 4.6.3. Pour toute les lois usuelles on peut construire des tables de données qui nous donnent certaines probabilités associées à la loi. En annexe, on donne une table de la loi de Poisson (calculs des probabilités ou calcul de la fonction de répartition).

► : Pour s'entraîner : exo 8.

5. ANNEXE : TABLES DE LA LOI DE POISSON

5.1. Calcul des probabilités $P(X = k)$ pour $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

k	λ	0,1	0,2	0,3	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		0,9048	0,8187	0,7408	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	
1		0,0905	0,1637	0,2222	0,3033	0,3679	0,3347	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2		0,0045	0,0164	0,0333	0,0758	0,1839	0,2510	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3		0,0002	0,0011	0,0033	0,0126	0,0613	0,1255	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4			0,0001	0,0003	0,0016	0,0153	0,0471	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337	0,0189
5					0,0002	0,0031	0,0141	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6						0,0005	0,0035	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7						0,0001	0,0008	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8							0,0001	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9								0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10									0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11									0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12									0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13										0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14										0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15											0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16												0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17												0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18													0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19													0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20														0,0002	0,0006	0,0019
21														0,0001	0,0003	0,0009
22															0,0001	0,0004
23																0,0002
24																0,0001

Les cases vides contiennent une valeur non nulle strictement inférieure à 0,0001.

5.2. Calcul de la fonction de répartition : $F_X(k) = P(X \leq k)$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

k	λ	0,1	0,2	0,3	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		0,9048	0,8187	0,7408	0,6065	0,3679	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1		0,9953	0,9825	0,9631	0,9098	0,7358	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2		0,9998	0,9989	0,9964	0,9856	0,9197	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3		1	0,9999	0,9997	0,9982	0,9810	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4		1	1	1	0,9998	0,9963	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5		1	1	1	1	0,9994	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6		1	1	1	1	0,9999	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7		1	1	1	1	1	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8		1	1	1	1	1	1	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9		1	1	1	1	1	1	1	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10		1	1	1	1	1	1	1	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
11		1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
12		1	1	1	1	1	1	1	1	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
13		1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
14		1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
15		1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
16		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
17		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
18		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
19		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9997	0,9989	0,9965
20		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9996	0,9984
21		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9998	0,9993
22		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997
23		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,9999

Les cases contenant 1 contiennent en réalité une valeur très proche mais légèrement inférieure à 1, qui est la limite de la fonction de répartition en $+\infty$.

6. SUJETS D'ANNALES EN LIEN AVEC CE CHAPITRE.

Remarque 6.0.1. 1. Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur

Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole *.
3. Cette liste n'est pas exhaustive.
4. Je n'ai pas fait apparaître dans cette liste les exercices qui consistent à étudier un processus aléatoire (dont on reparlera en détails), même s'ils font appel à des lois discrètes.

1. ECRICOME

- 1988 Exercice 2 *.
- 1989 Exercice 2.
- 1991 Problème *.
- 1993 Problème *.
- 1998 Problème (seul un bout de la partie D est *).
- 2003 Exercice 3.
- 2004 Exercice 4 *.
- 2007 Exercice 3.
- 2008 Exercice 3 *.
- 2009 Exercice 3.
- 2010 Exercice 3.
- 2011 Exercice 3.
- 2012 Exercice 3.
- 2013 Exercice 3.
- 2014 Exercice 3 *.
- 2015 Exercice 3.
- 2017 Exercice 3.
- 2018 Exercice 3 *.
- 2021 Exercice 3.
- 2022 Exercice 3.
- 2023 (sujet 0) Exercice 2.

2. EDHEC

- 1997 Problème *.
- 1999 Exercice 3.
- 2000 Problème.
- 2001 Exercice 2.
- 2002 Exercice 1 * et Exercice 2.
- 2004 Exercice 3.
- 2006 Problème.
- 2007 Exercice 2 * et Problème.
- 2009 Exercice 2.
- 2012 Exercice 3.

- 2014 Exercice 3 *.
- 2016 Problème.
- 2018 Exercice 2.
- 2019 Exercice 2.
- 2020 Exercice 2.
- 2021 Problème.
- 2022 Exercice 2.

3. EML

- 2000 Exercice 3.
- 2005 Exercice 3.
- 2009 Exercice 3.
- 2010 Exercice 3 *.
- 2011 Exercice 3 *.
- 2013 Exercice 3.
- 2014 Exercice 4 *.
- 2017 Exercice 3.
- 2018 Exercice 3.
- 2022 Exercice 1.
- 2023 Exercice 3, 1ère partie.
- 2024 Exercice 3.

4. ESCP

- 1984 épreuve II Problème *.
- 1986 épreuve III Exercice 4.
- 1988 épreuve III Exercice 3 *.
- 1989 épreuve III Exercice 3.
- 1990 épreuve III Exercice 3.
- 1992 épreuve III Exercice 3.
- 1996 épreuve III Exercice 3.
- 1997 épreuve III Exercice 3.
- 1998 épreuve III Exercice 3 *.
- 1999 épreuve III Exercice 3.
- 2000 épreuve III Exercice 3.
- 2001 épreuve III Exercice 3.
- 2002 épreuve II *.
- 2002 épreuve III Problème.
- 2003 épreuve III Exercice et Problème *.
- 2004 épreuve III Problème *.

5. ESC

- 2004 Exercice 3.
- 2005 Exercice 3.
- 2007 Exercice 3 *.

- 2008 Exercice 3.
- 2009 Exercice 3.

6. ESSEC

- 1986 épreuve I Exercice 3.
- 1986 épreuve II Partie II.
- 1988 épreuve II Partie I.
- 1989 épreuve I Partie II.
- 1989 épreuve II Partie I et II.
- 1990 épreuve I Exercice 1.
- 1990 épreuve II Exercice 2.
- 1991 épreuve II Partie II.
- 1993 épreuve II Partie II.
- 1996 épreuve II Partie II.
- 1998 épreuve II Partie II.
- 1999 épreuve II Partie I et II.
- 2001 épreuve II Partie I et II *.
- 2002 épreuve III Exercice 2.
- 2003 épreuve II *.
- 2003 épreuve III Exercice 2 *.
- 2004 épreuve II toute l'épreuve *.
- 2004 épreuve III toute l'épreuve.
- 2005 épreuve II Partie I *.
- 2005 épreuve III Exercice 1.
- 2006 épreuve II Partie I.
- 2006 épreuve III toute l'épreuve (l'exercice 2 est *).
- 2008 épreuve II.
- 2008 épreuve III Exercice 2.
- 2011 épreuve II toute l'épreuve.
- 2012 épreuve I *.
- 2012 épreuve II *.
- 2013 épreuve II *.
- 2016 épreuve II *.
- 2018 épreuve II *.
- 2019 épreuve II *.
- 2020 épreuve II *
- 2021 épreuve II *.
- 2022 épreuve II *.

7. HEC

- Toutes les épreuves utilisent toujours, au milieu d'autres choses des lois discrètes.